LÓGICA ALGEBRAICA Y ÁLGEBRA

Dualidad para las álgebras de Hilbert finitas

Leonardo Cabrer y Sergio Celani
Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Centro
Pinto 399, 7000. Tandil

En [5] A. Diego probó que toda álgebra de Hilbert es isomorfa a una subálgebra del reducto implicativo de un álgebra de Heyting generada por un determinado espacio topológico. En [1] se prueba que toda álgebra de Hilbert $\mathbf{A}$ puede ser representada como una subálgebra del reducto implicativo del álgebra de Heyting $\mathcal{P}_c(X)$ de todos los subconjuntos crecientes de un conjunto ordenado $\langle X, \leq \rangle$. Por otra parte, en [1] se muestra que existe una dualidad topológica entre semi-retículos distributivos y ciertos espacios topológicos ordenados y en [2] se extienden estos resultados al caso de los semi-retículos implicativos. En este último artículo se prueba también que toda álgebra de Hilbert es isomorfa al reducto implicativo de un semi-retículo implicativo. Este resultado mejora el teorema de representación de A. Diego y el teorema probado en [1]. Esta representación no determina una dualidad para las álgebras de Hilbert, pues como se muestra en [2], la representación es una dualidad solamente cuando el álgebra de Hilbert tienen una estructura de semi-retículo implicativo. Por otra parte, usando algunos resultados de [1] y algunas técnicas de [4], es posible desarrollar una dualidad para las álgebras de Hilbert *finitas*. En esta comunicación mostraremos que el espacio dual de un álgebra de Hilbert finita $\mathbf{A}$ es una estructura $\langle X, \leq, \mathcal{S} \rangle$, llamado *H-espacio*, donde $\langle X, \leq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado y $\mathcal{S}$ es un subconjunto no vacío de $\mathcal{P}(X)$. Como aplicación de esta dualidad se analiza el caso de álgebras de Hilbert finitas con supremo y/o ínfimo.

Referencias

[1] S. A. Celani, *A note on Homomorphisms of Hilbert Algebras.* International Journal of Mathematical and Mathematics Science, Vol. 29, No. 1 (2002), pp. 55-61.

[2] S. A. Celani, *Topological Representation of Distributive Semilattices*, Scientiae Mathematicae Japonicae online, Vol. 8, (2003), pp.41-51.

[3] S. A. Celani, *Representation of Hilbert algebras and Implicative Semilattices,* Aceptado en Central European Mathematical Journal, 2003.

[4] S. A. Celani, *A note on Modal Tarski algebras*, preprint.

[5] A. Diego, *Sûr les algébres de Hilbert.* Ed. Hermann. Colléction de Logique Math. Serie A 21 (1966).

Representación de semi-retículos distributivos y semi-retículos implicativos

Sergio A. Celani
Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Centro
Pinto 399, 7000. Tandil

En el libro de Gratzer [3] se definen los semi-retículos distributivos $\mathcal{DSL}$ como aquellos semi-retículos donde el conjunto de los filtros, considerado como un retículo, es distributivo. Una conocida clase de álgebras que tienen un reducto de semi-retículos distributivos es la variedad de los semi-retículos implicativos [4] [5] La álgebras de la clase $\mathcal{DSL}$ admiten una representación topológica de la cual pueden obtenerse las conocidas representaciones de Stone para los retículos distributivos y para las álgebras de Boole. Gratzer afirma que existe también una representación para los homomorfismos, pero en ningún momento demuestra tal afirmación. Esto es lo que motivo al estudio de la representación topológica para la clase $\mathcal{DSL}$. En esta comunicación vamos a demostrar que existe una dualidad topológica por medio de espacios topológicos ordenados para la clase $\mathcal{DSL}$ [1] y para los semi-retículos implicativos [2]. Los homomorfismos, en contra de los resultados usuales, son repre-sentados por medio de relaciones binarias. En el caso de los semi-retículos implicativos se puede probar que las relaciones deben cumplir propiedades adicionales y son equivalente a cierto tipo de funciones.

Referencias

[1] S. A. Celani, *Topological Representation of Distributive Semilattices,* Scientiae Mathematicae Japonicae online, Vol. 8, (2003), pp.41-51.
[2] S. A. Celani, *Representation of Hilbert algebras and Implicative Semilattices,* Aceptado en Central European Mathematical Journal, 2003.
[3] G. Grätzer, *General Lattice Theory,* second edition, Birkhäuser Verlag, 1998.
[4] P. Köhler, *Brouwerian semilattices,* Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 268, (1981), 103-126.
[5] W.C. Nemitz, *Implicative semi-lattices,* Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965), 128-142.

Algebras de Łukasiewicz de Clausura

C. Cimadamore, L. Rueda y A. M. Suardíaz
Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253, 8000. Bahía Blanca

En este trabajo consideramos la variedad $\mathcal{CL}_n$ de las álgebras de Łukasiewicz n−valentes con un operador de clausura. Probamos que la categoría de las álgebras de $\mathcal{CL}_n$ es dualmente equivalente a la categoría de los espacios de Łukasiewicz con una relación de Priestley de preorden. Utilizando esta dualidad mostramos que existe un isomorfismo entre el reticulado de congruencias de $\mathcal{CL}_n$ y el reticulado de ciertos subconjuntos cerrados de su espacio de Priestley. Por medio de esta caracterización determinamos las álgebras subdirectamente irreducible no simples de $\mathcal{CL}_n$.

T-M-álgebras: M-álgebras mediante triples de retículos

Manuel M. Fidel
Departamento de Computación
Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253, 8000. Bahía Blanca

En este trabajo utilizaremos el método algebraico de Fidel y Brignole ([2]) para estudiar, mediante triples de retículos, el concepto de M-álgebras según T. Texeira ([3]) o álgebras de Ockham $\mathbf{P}_{3,1}$ según otros autores. Esto puede considerarse como una continuación de la tesis de T. Texeira en [3], donde se introduce la noción de M-álgebra y se estudian algunos casos particulares de esta noción. Una bibliografía más amplia puede encontrarse en [2].

Los modelos algebraicos estarán formados por triples (a_0, a_1, a_2), donde a_0, a_1 y a_2 son elementos de un retículo distributivo. Esto muestra nuevamente las ventajas de usar modelos basados en tuplas de elementos de otras álgebras conocidas al estudio de ciertos sistemas lógicos u otras álgebras. Veremos que el estudio de las M-álgebras es equivalente al de triples de elementos de retículos distributivos. Además, veremos que sus propiedades algebraicas fundamentales se reducen a las propiedades de retículos, siendo las demostraciones de gran sencillez, lo que es un punto más a favor de este enfoque. Consideramos también los sistemas formales introducidos por T. Teixeira en [3], generalizándolos a todas las variedades de M-álgebras, probando la consistencia y completud. Las T-M-álgebras y algunas de sus construcciones, como el del álgebra libre, permiten esclarecer con facilidad la interpretación semántica de estos sistemas formales.

Referencias

[1] T.S. Blyth y J.C. Varlet, *Ockham Algebras*, Oxford University Press, New York, 1994.
[2] M. M. Fidel y D. Brignole, *Estudio algebraico de ciertas lógicas no clásicas mediante producto de algebras*, Actas del Primer Congreso Dr. A. Monteiro, U.N.S., Bahía Blanca, 1991, 23 - 38.
[3] M. T. Teixeira, *M-álgebras*, Tesis Doctoral, Faculdade de Filosofia da U.S.P., Rio Claro, 1964.

A note on HB-algebras

Aldo V. Figallo, Guillermina Z. Ramón, Susana Saad
Departamento de Matemática.
Universidad Nacional del Sur.
Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca.
Instituto de Ciencias Básicas.
Universidad Nacional de San Juan, 5400 San Juan

In this note we investigate the class of algebras which we call HB-algebras. An HB-algebra is an algebra $\langle A, \rightarrow, \wedge, \vee, *, 0, 1\rangle$ of type $(2,2,2,2,0,0)$, which verifies the following conditions:

(i) the reduct $\langle A, \rightarrow, 1\rangle$ is a Hilbert algebra,
(ii) the reduct $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ is a bounded lattice,
(iii) the reduct $\langle A, *, 1\rangle$ is a commutative semigroup with unit,
(iv) for every $a, b \in A$ $\; a \rightarrow b = 1$ if and only if $a \wedge b = a$,
(v) the following identities hold:
  1. $x \wedge y = x * (x \rightarrow y)$,
  2. $((x \wedge y) * z) \rightarrow (x \wedge (y * z)) = 1$,
  3. $x \vee y = ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x)$.

Among other results, we prove that the class of BL-algebras [1] (see also [2],[3]), which satisfies the identity $x * x = x$, is strictly contained in the class of HB-algebras.

In addition, we show that the HB-congruences can be obtained by means of deductive $*$-absorbent systems, i.e. those subsets D of A such that

(D1) $1 \in D$,
(D2) $a, a \rightarrow b \in D$ imply $b \in D$,
(D3) if $d \in D$, then $a \rightarrow (a * d) \in D$, for every $a \in A$.

Referencias

[1] P. Hájek, *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer, (1998).

[2] A. V. Figallo, G. Ramón, S. Saad, *A note on the Distributives Hilbert Algebras*, Actas V Congreso de Matemática "Dr. Antonio A. R. Monteiro", Bahía Blanca (1999), 139–152.

[3] A. V. Figallo, G. Ramón, S. Saad, *A note on the Hilbert Algebras with Infimum.* Accepted for publication in Matematica Contemporanea. Sociedade Brasileira de Matematica.

Functional representations of monadic $n-$valued Łukasiewicz algebras

A. V. Figallo, C. Sanza and A. Ziliani
Departamento de Matemática. Universidad Nacional del Sur.
Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca.

In this note we obtain two functional representations for monadic n-valued Łukasiewicz algebras. As a consequence of one of these representations we prove that every monadic n-valued Łukasiewicz algebra can be embedded into a complete one.

On the structures of $\mathbf{Df}_2$-algebra definable over a finite Boolean algebra

Martín Figallo
Departamento de Matemática.
Universidad Nacional del Sur.
Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca.

The variety of $\mathbf{Df}_2$-algebras has been widely studied by several authors, but little research has pursued to investigate those problems inherent in finite algebras. In this note we denote the Boolean algebra with n atoms by $\mathbb{B}_n$.

In first place we prove that every $\mathbf{Df}_2$-algebra can be represented as a direct product of simple algebras. In this product, we indicate the type of simple algebras that take place in such decomposition and the number of algebras of each type.

We also prove that there exist $s(k)$ simple $\mathbf{Df}_2$-algebras with k atoms, where $s(k)$ may be calculated by means of the formula:

$$(1) \qquad s(k) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{\mathcal{P}_1 \in Part(\mathbb{B}_k, m) \\ \mathcal{P}_1 = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}}} \Gamma(|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_m|)$$

where

$$(2) \qquad \Gamma(s_1, \ldots, s_m) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} n \cdot m \leq k \\ n \leq s_1}} \frac{\prod_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^{s_j}}{n!}$$

and $Part(\Pi(\mathbb{B}_k), m)$ is the set of all partitions of $\Pi(\mathbb{B}_k)$ with m elements.

Finally, after exhaustive calculation, we have determined the number $\mathcal{DF}(n)$ of $\mathbf{Df}_2$-álgebra structures that can be defined over $\mathbb{B}_n$. More precisely, we have proved that the following formula holds:

$$(3) \qquad \mathcal{DF}(n) = \sum_{\mathcal{P} \in Part(\Pi(\mathbb{B}_n))} \prod_{C \in \mathcal{P}} s(|C|)$$

REFERENCIAS

[1] L. Henkin, D. Monk and A. Tarski, *Cylindric Algebras*. Parts I & II, North-Holland, 1971 & 1985.

[2] M. Figallo, *Finite diagonal- free two-dimensional cylindric algebras*, Libro de resúmenes del XIII Encontro Brasileiro de Logica, Campinas, Brasil, mayo del 2003.

T-M-álgebras : M-álgebras mediante triples de retículos II

Manuel M. Fidel
Departamento de Computación
Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253, 8000. Bahía Blanca

En este trabajo determinamos todas las variedades de T-M-álgebras, o equivalentemente, la de M-álgebras (ver bibliografía en el resumen del trabajo de este congreso *T-M-álgebras: M-álgebras mediante triples de retículos I*). Queremos aclarar que el estudio de todas las variedades de M-álgebras fue hecho por mí en los años '70 (ver [1]) y nunca publicado en detalle, sin utilizar los métodos con triples. Independientemente fue publicado por Blyth en [3], con un error, luego corregido en el libro de Blyth y Varlet [2].

El método utilizado aquí es más sencillo y directo que el de Blyth y Varlet [2], y permite obtener explícitamente las 461 variedades de T-M-álgebras, las igualdades y propiedades de los filtros primos que las caracterizan, así cómo se reflejan en igualdades sobre los retículos que constituyen los triples y sus propiedades de filtros primos. No se coincide en el número total de variedades: para Blyth y Varlet hay una más.

REFERENCIAS

[1] M. M. Fidel, *Clases de M-lgebras definidas por igualdades*, (abstract), Reunion Anual de la U.M.A., Salta, 1970.

[2] T.S. Blyth y J.C. Varlet, *Ockham Algebras*, Oxford University Press, New York, 1994.

[3] T. S. Blyth; A. S. A. Noor; J. C. Varlet, *Subvarieties of double MS-algebras into which an MS-algebra can be extended*, Bull. Soc. Roy. Sci. Lige 56 (1987), no. 1, 47 - 53.

Injectives in Quasivarieties of Pocrims

Héctor Freytes
Departamento de Matemtica.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Universidad de Buenos Aires

Injectives and absolute subretracts in several classes of partially ordered commutative residuated integral monoids (pocrims) [3] are characterized using a generalization of the Balbes-Horn argument [2]. Among the classes considered are residuated lattices [6], Girard monoids [6], hoops [3] , bounded hoops [1] BL-algebras [5] , MV-algebras [4], and linear Heyting algebras [5] .

References

[1] Agliano, P., Ferrerim, I.M.A., Montagna F., *Basic hoops: An algebraic study of continuous t-norms*, Preprint,(1999).
[2] Balbes, R., Horn, A.*Injective an Projective Heyting algebras* , Trans. Am. Math. Soc. 148 (1970) , 549-559.
[3] Blok, W.J., Ferreirim, I.M.A. *On the structure of hoops*, Algebra Univers. 43 (2000), 233-257.
[4] Cignoli, R., D'Ottaviano, M. I., Mundici, D.,*Algebraic foundations of many-valued reasoning*, Kluwer, Dordrecht (2000).
[5] Hjek, P., *Metamathematics of fuzzy logic*, Kluwer, Dordrecht (1998).
[6] Hhle, U.,*Commutative, residuated l-monids.* In: Non-classical Logic and their applications to Fuzzy Subset. A Handbook on the Mathematical Foundations of Fuzzy Set Theory, Hhle, U.; Klement, E. P. (Editors). Kluwer, Dordrecht (1995).

Dualidad de Priestley para los M_3-retículos

María A. Jiménez
Instituto de Ciencias Básicas.
Universidad Nacional de San Juan.

Motivado en la implementación de ciertos circuitos de conmutación, A. V. Figallo en [1] definió a los M_3-retículos (ver también [2], [3]) como álgebras $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangle, 0\rangle$ de tipo $(2,2,1,1,0)$ tales que los reductos $\langle L, \wedge, \vee, 0\rangle$ son retículos distributivo con primer elemento 0 y que satisfacen las siguientes propiedades:
(M1) $\triangle(x\wedge \sim x) = 0$, (M2) $\sim\sim x = x$, (M3) $x = \triangle x \vee \sim \nabla x$, donde ∇x es una abreviatura de $x \vee \sim x$, (M4) $\sim \triangle x \vee \triangle x = \triangle x$, (M5) $\triangle \nabla x = \nabla x$, (M6) $\triangle(x \vee y) = \triangle x \vee \triangle y$, (M7) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

En esta nota extendemos la dualidad Priestley al caso de los M_3-retículos. Por medio de esta dualidad describimos las M_3-congruencias y los M_3-retículos subdirectamente irreducibles.

REFERENCIAS

[1] A. V. Figallo, *Los M_3–Reticulados*, Rev. Colombiana de Matemática, 21 (1987), 95-106.
[2] A. V. Figallo, *M_3–Reticulados finitos*, Rev. de la Unión Matematica Argentina, 36 (1990), 21-26.
[3] A. V. Figallo, *Una nota sobre M_3–Reticulados*, Rev. Colombiana de Matemática, 24 (1990).

Dualidades para las álgebras de Łukasiewicz θ–valuadas sin y con negación

Inés Pascual
Instituto de Ciencias Básicas.
Universidad Nacional de San Juan.

En esta nota obtenemos una dualidad topológica para las álgebras de Łukasiewicz θ–valuadas, o Luk$_\theta$-álgebras, similar a la indicada en [1]. A partir de nuestra dualidad hemos ontenido una nueva descripción para las Luk$_\theta$-congruencias, por medio de ciertos subconjuntos cerrados del espacio asociado.

Posteriormente hemos extendido nuestra dualidad al caso de las Luk$_\theta$-álgebras con negación, o nLuk$_\theta$-álgebras, y, hemos descripto via esta dualidad a las nLuk$_\theta$-congruencias y nLuk$_\theta$-álgebras subdirectamente irreducibles de manera diferente a las indicadas en [1].

REFERENCIAS

[1] C. Boicescu, A. Filipoiu, G. Georgescu and S. Rudeanu, *Lukasiewicz-Moisil Algebras*, North-Holland, 1991.

Cartan-Leray para cubrimientos de Galois

María Julia Redondo
INMABB - Universidad Nacional del Sur.
Av. Alem 1253. Bahía Blanca.

La cohomología de Hochschild Mitchell de una k- categoría permite establecer una sucesion espectral de Cartan-Leray, usando cohomología de grupos. En particular la cohomología en grado uno del grupo con coeficientes triviales es un subespacio vectorial canónico del primer grupo de cohomología de Hochschild de la categoría base.

Dimensión de representación de algunas clases de álgebras de artin

María Inés Platzeck
INMABB -Universidad Nacional del Sur.
Av. Alem 1253. Bahía Blanca.

Este es una comunicación de un trabajo conjunto con Flávio Coelho. Demostramos que la dimensión de álgebras en las siguientes clases es a lo sumo tres: a) Algebras de artin A tales que la longitud del funtor $Hom_A(D(A), -)$ es finita (o, dualmente, la longitud de $Hom_A(-, A)$ es finita). Estas álgebras coinciden con las álgebras pegadas a derecha (izquierda), introducidas por I.Assem y F. Coelho, y b) Extensiones triviales de álgebras inclinadas iteradas. Comparamos además , bajo hipótesis apropiadas, la dimensión de rerpresentación de un álgebra de artin B y la de una extensión por un punto de B.